

Esercizio 1 Sia $f(x)$ una funzione definita in \mathbb{R} che soddisfa

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Si provi che

- $f(0) = 0$
- $f(x-y) = f(x) - f(y)$ per ogni x, y
- se f è continua in 0 allora è continua in \mathbb{R}

Esercizio 2 Sia $f(x)$ una funzione definita in \mathbb{R} che soddisfa

$$|f(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si provi che $f(x)$ è continua in 0.

Esercizio 3 Si determini l'insieme di definizione e i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+x^n}{x^n}.$$

Esercizio 4 Sia

$$f(x) = x(x - e^{-x}).$$

- si dimostri che l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 2]$
- si dimostri che l'equazione di sopra ammette almeno due soluzioni in \mathbb{R} .

Esercizio 5 Sia $f(x)$ una funzione polinomiale di grado pari

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{con } n \text{ pari.}$$

Si determini il numero minimo di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ sapendo che il coefficiente del termine di grado massimo a_n e il termine noto a_0 hanno segno opposto.

Esercizio 6 Sia $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- Dare esempi di funzioni f che soddisfano le ipotesi, ma non ammettono minimo.
- Dimostrare che, se esiste $x_0 > a$ tale che $f(x_0) < \ell$, allora la funzione f ammette minimo.

Esercizio 7 Sia $f : I \rightarrow I$ continua in $I = [a, b]$. Dimostrare che esiste un $\bar{x} \in I$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Un punto che verifica questa equazione si chiama "punto fisso" per f . Fare un esempio in cui x non è unico.

[Suggerimento: applicare il teorema di esistenza degli zeri alla funzione $f(x) - x$.]

Esercizio 8 Sia $f : I \rightarrow I$ continua in $I = [a, b]$. Dimostrare che se $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$ per ogni $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, allora **esiste un unico** $\bar{x} \in I$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Esercizio 9 Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, tale che

$$f(x) = 3 - 2x^2, \quad \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Calcolare $f(\frac{\pi}{4})$ ed $f(\frac{\pi}{8})$.

Esercizio 10 Dire se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ nei seguenti casi

1. $a = +\infty, f(x) = \frac{\arctan(6x)}{1 + 3x^2}$. V F

2. $a = 0, f(x) = \frac{\log(1 + 3x^2)}{\sin(x^2)}$. V F

3. $a = 3, f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9} - (x - 3)}{e^{-\frac{1}{x^2 - 9}}}$. V F

Esercizio 11 Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 5, f(1) = 10$.

1. Se f è monotona, allora $\text{Im}(f) = [5, 10]$. V F

2. Se $\text{Im}(f) = [5, 10]$, allora f è monotona e continua. V F

3. Se f è continua, allora $\max_{[0,1]} f(x) = 10$. V F

4. Se f è continua, allora esiste $x \in (0, 1]$ tale che $f(x) - \sin^2(\cos x^3) = 7$. V F